THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Jacques GASQUI

UNE DEMONSTRATION DU THEOREME DE E. CARTAN SUR LES IMMERSIONS ISOMETRIQUES

Préparée dans le Laboratoire de Mathématiques Pures, associé au CNRS,

Soutenue le 15 juin 1973 devant la commission d'examen

C. CHABAUTY Président

B. MALGRANGE
H. GOLDSCHMIDT
Examinateurs

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Jacques GASQUI

UNE DEMONSTRATION DU THEOREME DE E.CARTAN SUR LES IMMERSIONS ISOMETRIQUES

Préparée dans le Laboratoire de Mathématiques Pures, associé au CNRS,
Soutenue le 15 juin 1973 devant la commission d'examen

C.CHABAUTY Président

B.MALGRANGE
H.GOLDSCHMIDT
Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION	
I - PRELIMINAIRES.....	1
0. Existence de solutions formelles pour les équations différentielles non-linéaires....	1
1. La deuxième forme fondamentale d'une immersion.....	5
2. Préliminaires algébriques	7
II - IMMERSIONS ISOMETRIQUES	11
3. Construction de l'équation fondamentale ..	11
4. Calcul de certains caractères	16
5. Le théorème de Cartan	22
6. Le problème à deux dimensions	27
7. Application aux variétés à courbure constante	28
8. Le rôle de la courbure	29
BIBLIOGRAPHIE	32

-o00o-

INTRODUCTION

Utilisant sa théorie des systèmes de Pfaff en involution, E. Cartan démontre dans [1] que toute variété riemannienne analytique (X,g) de dimension n s'immerge isométriquement localement dans l'espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions ou, plus généralement, dans toute variété riemannienne analytique (Y,g') de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$: nous nous proposons de donner une nouvelle version de ce théorème en montrant qu'une certaine équation différentielle non-linéaire d'ordre 2, $\tilde{R}_2$, construite sur un sous-fibré ouvert du fibré trivial $pr_1 : X \times Y \to X$, et dont les solutions sont des immersions isométriques de X dans Y , est formellement intégrable (théorème 5.1).

Pour construire l'équation $\tilde{R}_2$ disons, en gros, que l'on ajoute à l'équation initiale "$f^*g' = g$" les classiques équations de Gauss-Weingarten et Gauss. Si T désigne le fibré tangent à X , soit G le sous-fibré de $\otimes^4 T^*$, dont les sections sont les double 2-formes sur X . On note H le sous-fibré de $T^* \otimes G$ des éléments vérifiant la deuxième identité de Bianchi (Définition 2.1) et W' le fibré image réciproque du fibré quotient $T^* \otimes G/H$ par la projection $\pi : \tilde{R}_2 \to X$. Nous commençons par établir que l'application $\pi_2 : \tilde{R}_3 \to \tilde{R}_2$ est surjective en construisant une section Ω de W' sur $\tilde{R}_2$ telle que la suite

$$\tilde{R}_3 \xrightarrow{\pi_2} \tilde{R}_2 \underset{0}{\overset{\Omega}{\rightrightarrows}} W'$$

soit exacte, et en montrant qu'elle est nulle (corollaire 5.2). Nous prouvons, au passage, que W' s'identifie canoniquement au deuxième groupe de cohomologie de Spencer $H^{1,2}(g_2)$, où g_2 est le symbole de $\tilde{R}_2$.

Soit p un élément de $\tilde{R}_2$: une base $\{t_1,\ldots,t_n\}$ de $T_{\pi(p)}$ telle que la restriction de la deuxième forme fondamentale de p au carré symétrique du sous-espace engendré par $t_1,\ldots,t_{n-1}$ soit injective, est quasi régulière pour $(g_2)_p$. Le théorème 5.1 s'obtient donc comme conséquence du théorème 8.1 de [4] .

Comme la plupart des difficultés que l'on rencontre dans le cas général disparaissent lorsque $\dim X = 2$, nous donnons au §6 un traitement à part de ce problème. Enfin, dans les §7 et 8 on montre qu'avec des conditions sur sa courbure, on peut immerger isométriquement X dans des variétés de dimension plus petite que $\frac{n(n+1)}{2}$.

Toute ma reconnaissance va au Professeur H. GOLDSCHMIDT, qui s'est déplacé spécialement de Nice pour participer au jury : sans les très nombreux entretiens qu'il m'a accordés, sans ses conseils, je n'aurais pu mener à bien ce travail.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur le Professeur C. CHABAUTY d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse et de m'avoir permis de travailler dans d'excellentes conditions à Grenoble.

Monsieur le Professeur B. MALGRANGE a accepté d'être examinateur. Je le remercie très vivement pour l'honneur qu'il me fait.

Madame GUTTIN-LOMBARD, Messieurs GAUDE et GIRARD se sont occupés avec gentillesse et compétence de la réalisation matérielle de ce travail. Je les en remercie très sincèrement.

I - PRELIMINAIRES

0. EXISTENCE DE SOLUTIONS FORMELLES POUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON-LINEAIRES.

Les résultats de ce paragraphe se trouvent dans [4] ou [5] . Soit X une variété différentiable (i.e. de classe C^∞) de dimension n : on note T (resp. T^*) le fibré tangent (resp. cotangent) à X .

Etant donné un entier positif k , on pose

$$\delta(\ell_1 \circ \ldots \circ \ell_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \ell_i \otimes \ell_1 \circ \ldots \circ \hat{\ell}_i \circ \ldots \circ \ell_{k+1}$$

pour tout produit symétrique $\ell_1 \circ \ldots \circ \ell_{k+1}$ de $k+1$ vecteurs cotangents en un même point de X , et l'on étend cette opération en un morphisme de fibrés vectoriels sur X

$$\delta : S^{k+1}T^* \to T^* \otimes S^k T^* \quad .$$

On étend à son tour δ en un morphisme de fibrés vectoriels sur X

$$\delta : \Lambda^j T^* \otimes S^{k+1} T^* \to \Lambda^{j+1} T^* \otimes S^k T^*$$

envoyant $\omega \otimes u$ sur $(-1)^j \omega \wedge \delta u$, si $\omega \in \Lambda^j T^*$ et $u \in S^{k+1}T^*$.

Lemme 0.1.

Si $m \geq 1$, *la suite*

$$0 \to S^m T^* \xrightarrow{\delta} T^* \otimes S^{m-1} T^* \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes S^{m-2} T^* \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^* \otimes S^{m-n} T^* \to 0$$

est exacte.

Soient $\xi : W \to X$ un fibré vectoriel, Y une variété différentiable, f une application différentiable de Y dans X et g_k un sous-fibré à fibre variable de $S^k T^* \otimes_Y W$, où $k \geq 1$. Si ℓ est un entier positif, on définit le ℓ-ième prolongement de g_k comme étant le sous-fibré à fibre variable $g_{k+\ell}$ de $S^{k+\ell} T^* \otimes_Y W$, noyau du morphisme $\Delta_{\ell,k} \circ \psi$, où

$$\Delta_{\ell,k} : S^{k+\ell} T^* \otimes_Y W \to S^\ell T^* \otimes S^k T^* \otimes_Y W$$

est l'application naturelle, et

$$\psi : S^\ell T^* \otimes S^k T^* \otimes_Y W \to S^\ell T^* \otimes_Y ((S^k T^* \otimes_Y W)/g_k)$$

le morphisme induit par la projection canonique de $S^k T^* \otimes_Y W$ sur $(S^k T^* \otimes_Y W)/g_k$. On pose $g_{k-\ell} = S^{k-\ell} T^* \otimes_Y W$ pour $\ell > 0$. Il est facile de voir que $\delta(g_{k+\ell+1}) \subset T^* \otimes_Y g_{k+\ell}$ et, par conséquent, δ induit un morphisme

$$\delta : \Lambda^j T^* \otimes_Y g_{k+\ell+1} \to \Lambda^{j+1} T^* \otimes_Y g_{k+\ell} \ ;$$

pour $m \geq k$, on a donc un complexe

$$0 \to g_m \xrightarrow{\delta} T^* \otimes_Y g_{m-1} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Lambda^{m-k} T^* \otimes_Y g_k \xrightarrow{\delta} \Lambda^{m-k+1} T^* \otimes_Y S^{k-1} T^* \otimes_Y W ,$$

dont on note $H^{m-j,j}(g_k)$ la cohomologie en $\Lambda^j T^* \otimes_Y g_{m-j}$. On dira que g_k est r-acyclique si $H^{m,j}(g_k) = 0$ pour $m \geq k$ et $0 \leq j \leq r$, et que g_k est involutif s'il est n-acyclique. Soient $x \in X$ et $p \in Y$ tels que $f(p) = x$; on note pour le moment T, g_k, ... etc., les fibres en x ou p de ces fibrés. Si $t \in T$, on note δ_t l'application linéaire de $S^{m+1} T^*$ dans $S^m T^*$ définie par

$$(\delta_t u)(v_1, \dots, v_m) = (\delta u)(t, v_1, \dots, v_m) ,$$

pour tous $u \in S^{m+1} T^*$ et $v_i \in T$, $i = 1, \dots, m$. Soient $\{t_1, \dots, t_n\}$ une base de T et V un sous-espace vectoriel de $S^m T^* \otimes_Y W$; si i est un entier compris entre 1 et n, on désigne par $V\{t_1, \dots, t_i\}$ ou $V(i)$ le sous-espace des éléments u de V tels que

$$\delta t_j u = 0 \quad , \quad \text{avec} \quad j = 1, \dots, i \ ;$$

on posera, par convention, $V(o) = V$. Comme les δt commutent entre

elles, on a des applications

$$(0.1)_i \qquad \delta_{t_{i+1}} : g_{k+1}\{t_1,\dots,t_i\} \to g_k\{t_1,\dots,t_i\} \ .$$

Définition 0.1.

Si les applications $(0.1)_i$ sont surjectives pour tout i, on dit que $\{t_1,\dots,t_n\}$ est une base quasi-régulière pour g_k.

Le résultat suivant est classique.

Lemme 0.2.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\{t_1,\dots,t_n\}$ est une base quasi-régulière pour g_k ;

(b) on a $\sum_{i=0}^{n} \dim g_k\{t_1,\dots,t_i\} = \dim g_{k+1}$.

Lemme 0.3. ([6])

Le sous-espace g_k est involutif si et seulement si il existe une base quasi-régulière pour g_k.

Soit $\pi : E \to X$ un fibré. On note $\pi : J_k(E) \to X$ le fibré des k-jets de sections de E. Le fibré

$$\pi_{k-1} : J_k(E) \to J_{k-1}(E)$$

est un fibré affine de fibré vectoriel associé $S^k T^* \otimes_{J_{k-1}(E)} V(E)$: on peut donc identifier le fibré $S^k T^* \otimes_{J_k(E)} V(E)$ à un sous-fibré du fibré vertical $V(J_k(E))$.

Définition 0.2.

Une équation différentielle d'ordre k sur le fibré E est un sous-fibré R_k de $J_k(E)$; le ℓ-ième prolongement de R_k, $R_{k+\ell}$, est égal à $J_\ell(R_k) \cap J_{k+\ell}(E)$, où $J_\ell(R_k)$ est identifié à un sous-fibré de $J_\ell(J_k(E))$; enfin, le symbole de R_k est le sous-fibré à fibre variable $g_k = V(R_k) \cap S^k T^* \otimes_{R_k} V(E)$.

Remarque.

S'il existe un fibré F de base X, une section s de F sur X et un morphisme de fibrés sur X $\varphi : J_k(E) \to F$ tels que $R_k = \mathrm{Ker}_s(\varphi)$, on a

$$(g_k)_p = \mathrm{Ker}(\varphi_* : (S^k T^* \otimes_{R_k} V(E))_p \to V_{\varphi(p)}(F)) ,$$

pour tout $p \in R_k$.

Définition 0.3.

Une équation différentielle d'ordre k sur E, R_k, est formellement intégrable si, pour tout $\ell \geq 0$, on a

1) $\pi_{k+\ell} : R_{k+\ell+1} \to R_{k+\ell}$ est surjective,

et

2) $g_{k+\ell+1}$ est un fibré vectoriel au-dessus de R_k.

Le théorème qui suit donne un critère pour l'intégrabilité formelle.

Théorème 0.1. ([4])

Soit $R_k \subset J_k(E)$ une équation différentielle d'ordre k sur E telle que $\pi_k : R_{k+1} \to R_k$ soit surjective. Si g_k est 2-acyclique et si g_{k+1} est un fibré vectoriel sur R_k, alors R_k est formellement intégrable.

Soit R_k une équation différentielle d'ordre k sur E, égale à $\mathrm{Ker}_s(\varphi : J_k(E) \to F)$, où F est un fibré sur X, $\varphi : J_k(E) \to F$ un morphisme de fibrés sur X de rang constant et s une section de F sur X. On note W le fibré vectoriel à fibre variable sur R_k, conoyau du morphisme

$$\varphi_* \circ \delta : S^{k+1} T^* \otimes_{R_k} V(E) \to T^* \otimes_{R_k} V(F) .$$

Le lemme qui suit permet de mesurer fibre par fibre l'obstruction à la surjectivité de l'application $\pi_k : R_{k+1} \to R_k$.

Lemme 0.4. ([5]).

Il existe une section Ω de W telle que la suite

$$R_{k+1} \xrightarrow{\pi_k} R_k \underset{0}{\overset{\Omega}{\rightrightarrows}} W$$

soit exacte.

Démonstration : Si τ désigne la projection canonique de $T^*\otimes_{R_k} V(F)$ sur W, alors Ω se définit par

$$\Omega(u) = \tau(u, p_1(\varphi)v - j_1(s)(x)) ,$$

si $u \in R_k$, où $x = \pi(u)$ et v est un élément quelconque de $J_{k+1}(E)$ tel que $\pi_k(v) = u$.

Supposons que X soit une variété analytique réelle et que le fibré E soit analytique ; on dira qu'une équation R_k d'ordre k sur E est analytique si c'est un sous-fibré analytique de $J_k(E)$.

Théorème 0.2. ([4]).

Soit R_k une équation analytique d'ordre k sur E qui est formellement intégrable. Alors, étant donné $p \in R_{k+\ell}$, avec $\pi(p) = x \in X$, il existe une solution analytique s de l'équation R_k sur un voisinage de x telle que $j_{k+\ell}(s)(x) = p$.

1. LA DEUXIEME FORME FONDAMENTALE D'UNE IMMERSION.

Soient (X,g) et (Y,g') deux variétés riemanniennes de dimension finie telles que $\dim X = n$ soit inférieur ou égal à $\dim Y = m$. On note

1) $\pi : E \to X$ le fibré trivial $pr_1 : X\times Y \to X$; on ne distinguera pas, dans la suite, une application de X dans Y de son graphe, section du fibré $\pi : E \to X$;

2) T (resp. T_Y) le fibré tangent à X (resp. Y) ;

3) ∇ (resp. ∇') la dérivation covariante associée à la connexion riemannienne sur (X,g) (resp. (Y,g')) ;

4) R (resp. R') le tenseur de courbure de (X,g) (resp. (Y,g')), section de $\otimes^4 T^*$ (resp. $\otimes^4 T_Y^*$) sur X (resp. Y) .

Si f est une application différentiable de X dans Y, de rang maximum en $x \in X$, on a le lemme suivant :

Lemme 1.1. ([7]).

Si $\xi_x \in T_x$ et si η est un champ de vecteurs sur X nul en x, alors le vecteur tangent $\nabla'_{f_*\xi_x} f_*\eta - f_*\nabla_{\xi_x}\eta$ en $f(x)$ à Y, où f_* désigne la différentielle de f, est nul.

Démonstration : Soient $x^1,\ldots,x^n$ des coordonnées locales sur un voisinage U de x dans X. Si $\eta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j}$ sur U, on a

$$\nabla'_{f_*\xi_x} f_*\eta = \sum_{j=1}^{n} \{\alpha_j(x)\nabla'_{f_*\xi_x} f_*\frac{\partial}{\partial x^j} + (\xi_x.\alpha_j) f_*(\frac{\partial}{\partial x^j})_x\} ,$$

et

$$f_*\nabla_{\xi_x}\eta = \sum_{j=1}^{n} \{\alpha_j(x) f_*\nabla_{\xi_x}\frac{\partial}{\partial x^j} + (\xi_x.\alpha_j) f_*(\frac{\partial}{\partial x^j})_x\} ;$$

comme $\alpha_j(x) = 0$ pour tout j, les vecteurs $\nabla'_{f_*\xi_x} f_*\eta$ et $f_*\nabla_{\xi_x}\eta$ sont égaux. C.Q.F.D.

Ce résultat nous permet de construire une application

$$B_x^f : \otimes^2 T_x \to T_{Y,f(x)}$$

de la manière suivante : si ξ et $\eta \in T_x$, on pose

$$B_x^f(\xi,\eta) = \nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta} - f_*\nabla_\xi\tilde{\eta} ,$$

où $\tilde{\eta}$ est une extension quelconque de η sur un voisinage de x dans X ; en fait, il est facile de constater que $B_x^f \in S^2 T_x^* \otimes T_{Y,f(x)}$.

La forme B^f_x est appelée deuxième forme fondamentale de l'immersion f en x ; il est clair que B^f_x ne dépend que du 2-jet de f en x ; plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 1.2.

Soient $(x^i)_{1\le i\le n}$ (resp. $(y^\alpha)_{1\le\alpha\le m}$) *des coordonnées locales au voisinage de* $x \in X$ (resp. $f(x) \in Y$) ; *si, dans ces systèmes de coordonnées,* f *est donnée par les applications* $f^\alpha(x^1,\dots,x^n)$, $\alpha = 1,\dots,m$, *on a*

$$B^f_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x,\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x\right) = \sum_{\gamma=1}^{m} \theta_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\right) f(x) \quad , \tag{1.1}$$

où

$$\theta_\gamma = \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{1\le\alpha,\beta\le m} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j}(x)\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}(x)\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}(f(x)) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(x)\,\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k}(x) \tag{1.2}$$

et

$$\Gamma^k_{ij} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \quad , \quad \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} = g'\left(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta}, \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\right) \quad .$$

Remarque.

Si ξ et η sont des champs de vecteurs sur un voisinage de x dans X , l'application

$$y \to B^f_y(\xi_y,\eta_y)$$

est définie sur un voisinage de x et sera notée $B^f(\xi,\eta)$.

2. PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.

On désignera par G le sous-fibré de $\otimes^4 T^*$ des éléments ω de $\otimes^4 T^*$ vérifiant les identités de courbure

$$\omega(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = -\omega(\eta,\xi,\zeta,\lambda)$$

$$\omega(\xi,\eta,\zeta,\lambda) + \omega(\eta,\zeta,\xi,\lambda) + \omega(\zeta,\xi,\eta,\lambda) = 0 \tag{2.1}$$

$$\omega(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = \omega(\zeta,\lambda,\xi,\eta)$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta,\lambda \in T$.

Soient $x \in X$ et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de T_x . Si V est le sous-espace vectoriel de $\Lambda^2 T_x \otimes \Lambda^2 T_x$ ayant pour base les vecteurs

$$E_{ijk\ell} = e_i \wedge e_j \otimes e_k \wedge e_\ell \quad , \quad \text{avec} \quad i<j \ , \ k<\ell \ , \ i\leq k \ , \ j\leq \ell \ ,$$

on a le lemme suivant :

Lemme 2.1.

L'homomorphisme φ_1 *de* G_x *dans* V , *défini par*

$$\varphi_1(\omega) = \sum_{\substack{i<j,k<\ell \\ i\leq k, j\leq \ell}} \omega(e_i,e_j,e_k,e_\ell) E_{ijk\ell}$$

pour tout $\omega \in G_x$, *est un isomorphisme*.

Démonstration : Montrons d'abord que φ_1 est injective. Soient $\omega \in G_x$ tel que $\varphi_1(\omega) = 0$ et i,j,k,ℓ des entiers compris entre 1 et n tels que $i<j$ et $k<\ell$:

a) si $i\geq k$ et $j\geq \ell$, alors $\omega(e_i,e_j,e_k,e_\ell) = \omega_{ijk\ell} = \omega_{k\ell ij} = 0$ (par hypothèses) ;

b) si $i\geq k$ et $j\leq \ell$, on a $\omega_{ijk\ell} = \omega_{kji\ell} - \omega_{kij\ell}$ et les termes du membre de droite de cette égalité sont de la forme ω_{stuv} , avec $s \leq t$, $u \leq v$, $s \leq u$, $t \leq v$, donc nuls ;

c) enfin, si $i\leq k$ et $j\geq \ell$, on a $\omega_{ijk\ell} = \omega_{k\ell ij}$, et on se ramène à la situation de b) .

Il est donc clair que $\omega = 0$. La surjectivité de φ_1 s'obtient par la même méthode.

Démonstration : Elle se fait en trois étapes :

a) Si W est le sous-espace vectoriel de $T_x \otimes V$ ayant pour base les vecteurs

$$F_{hijk\ell} = e_h \otimes E_{ijk\ell} \text{ , avec } h \leq j \text{ , } i < j \text{ , } k < \ell \text{ , } i \leq k \text{ , } j \leq \ell \text{ ,}$$

l'homomorphisme φ_2 de H_x dans W qui, à tout $\omega \in H_x$, associe l'élément

$$\sum_{\substack{h \leq j, i < j, k < \ell \\ i \leq k, j \leq \ell}} \omega(e_h, e_i, e_j, e_k, e_\ell) F_{hijk\ell}$$

est un isomorphisme ; ce résultat se démontre par des méthodes analogues à celles utilisées dans le lemme 2.1 ;

b) Si $H_{n-\alpha}(e_1, \ldots, e_n)$ est le sous-espace des éléments ω de H_x tels que

$$\omega(e_h, e_i, e_j, e_k, e_\ell) = 0 \text{ , avec } h \leq j \leq n-\alpha \text{ et } i < j \text{ ,}$$

φ_2 réalise un isomorphisme de $H_{n-\alpha}(e_1, \ldots, e_n)$ sur le sous-espace de W ayant pour base les vecteurs

$$F_{hijk\ell} \text{ , avec } h \leq j \text{ , } i < j \text{ , } k < \ell \text{ , } i \leq k \text{ , } j \leq \ell \text{ , } j \geq n-\alpha+1 \text{ ;}$$

c) A partir de là, on calcule les différences

$$\dim H_{n-\alpha}(e_1, \ldots, e_n) - \dim H_{n-\alpha+1}(e_1, \ldots, e_n)$$

et, par conséquent, les dimensions des sous-espaces $H_{n-\alpha}(e_1, \ldots, e_n)$.

Remarque.

Il est bien connu que le tenseur de courbure (resp. la dérivée covariante du tenseur de courbure) de X est une section de G (resp. H) sur X .

II - IMMERSIONS ISOMETRIQUES

3. CONSTRUCTION DE L'EQUATION FONDAMENTALE.

Etant donné un entier positif k , on note $\tilde{J}_k(E)$ le sous-fibré ouvert de $J_k(E)$ formé des k-jets d'applications de rang maximum. On entend par là que

$$\tilde{J}_k(E) = \bigcup_{x\in X} \tilde{J}_k(E)_x ,$$

où, pour tout $x \in X$, $\tilde{J}_k(E)_x$ désigne l'ensemble des k-jets d'applications différentiables de X dans Y de rang maximum en x . Pour simplifier, nous écrirons souvent dans la suite "soit $p = j_k(f)(x) \in \tilde{J}_k(E)_x$" pour "soit $p = j_k(f)(x) \in \tilde{J}_k(E)_x$, où f est une application de X dans Y de rang maximum sur un voisinage de $x \in X$ ".

Soit

$$\varphi' : \tilde{J}_1(E) \to S^2T^*$$

le morphisme de fibrés sur X défini par

(3.1) $$\varphi'(p) = (f^*g'-g)(x) ,$$

si $p = j_1(f)(x) \in \tilde{J}_1(E)_x$.

Proposition 3.1.

Si $p = j_1(f)(x) \in \tilde{J}_1(E)_x$ *et* $C \in T_x^* \otimes T_{Y,f(x)}$, *on a*

(3.2) $$\varphi'_{*p}(C)(\xi,\eta) = g'(C(\xi), f_*\eta) + g'(C(\eta), f_*\xi)$$

pour tous $\xi,\eta \in T_x$. *De plus,* $R'_1 = \mathrm{Ker}_o\varphi'$ *est une équation différentielle.*

Démonstration : La formule (3.2) montre que l'application

$$\varphi'_{*p} : T^*_x \otimes T_{Y,f(x)} \to S^2 T^*_x$$

est surjective, donc R'_1 est le noyau d'un morphisme de rang constant.

Remarque.

Nous verrons un peu plus loin que l'application $\pi_1 : R'_2 \to R'_1$, où R'_2 désigne le premier prolongement de R'_1, est surjective ; par contre, le lecteur vérifiera facilement que le symbole de R'_1 n'est pas en général involutif, ni même 2-acyclique.

Soient

$$\varphi : \tilde{J}_2(E) \to S^2 T^* ,$$

$$\psi : \tilde{J}_2(E) \to S^2 T^* \otimes T^*$$

les morphismes de fibrés sur X définis par

(3.3) $$\varphi = \varphi' \circ \pi_1$$

et par

(3.4) $$\psi(p)(\xi,\eta,\zeta) = g'(B^f_x(\xi,\eta), f_*\zeta)$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta \in T_x$, où $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$.

Proposition 3.2.

Le premier prolongement R'_2 *de* R'_1 *est égal à* $\mathrm{Ker}_o(\varphi \oplus \psi)$.

Démonstration : Soit $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ tel que $\pi_1(p) \in R'_1$, et soient $\xi,\eta,\zeta \in T_x$; on a :

(3.5) $$\psi(p)(\xi,\eta,\zeta) = g'(\nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta}, f_*\zeta) - g(\nabla_\xi \tilde{\eta}, \zeta)$$

$$= \frac{1}{2}\{\xi.[g'(f_*\tilde{\eta}, f_*\tilde{\zeta}) - g(\tilde{\eta},\tilde{\zeta})] + \eta.[g'(f_*\tilde{\xi}, f_*\tilde{\zeta}) - g(\tilde{\xi},\tilde{\zeta})]$$

$$- \zeta.[g'(f_*\tilde{\xi}, f_*\tilde{\eta}) - g(\tilde{\xi},\tilde{\eta})]\} ,$$

où $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ sont respectivement des extensions quelconques de ξ, η, ζ sur un voisinage de x dans X ; il est donc clair que, si $p \in R'_2$, alors $\psi(p) = 0$ et $p \in \mathrm{Ker}_o(\varphi \oplus \psi)$. Réciproquement, si

$\psi(p) = 0$, on a, en égalant η et ζ dans (3.5),

$$\xi.\,[g'(f_*\tilde{\eta}, f_*\tilde{\eta}) - g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta})] = 0$$

pour tout $\xi \in T_x$ et tout champ $\tilde{\eta}$ sur un voisinage de x dans X, donc $p \in R'_2$.

Corollaire 3.1.

R'_2 est une équation différentielle.

Démonstration : Soient $x \in X$, $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ et $C \in S^2T^*_x \otimes T_{Y,f(x)}$; on a :

$$\psi_{*p}(C)(\xi,\eta,\zeta) = g'(C(\xi,\eta), f_*\zeta) \tag{3.6}$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta \in T_x$; l'application

$$\psi_{*p} : S^2T^*_x \otimes T_{Y,f(x)} \to S^2T^*_x \otimes T^*_x$$

est donc surjective. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
S^2T^*_x \otimes T_{Y,f(x)} & \xrightarrow{\psi_{*p}} & S^2T^*_x \otimes T^*_x & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow i & & \\
V(\tilde{J}_2(E))_p & \xrightarrow{(\varphi \oplus \psi)_{*p}} & S^2T^*_x \oplus (S^2T^*_x \otimes T^*_x) & & \\
\downarrow \pi_{1*} & & \downarrow pr_1 & & \\
V(\tilde{J}_1(E))_{\pi_1(p)} & \xrightarrow{\varphi'_{*\pi_1(p)}} & S^2T^*_x & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

où i est l'injection linéaire naturelle de $S^2T^*_x \otimes T^*_x$ dans $S^2T^*_x \oplus (S^2T^*_x \otimes T^*_x)$, est exact et commutatif, par conséquent l'application

$$(\varphi \oplus \psi)_{*p} : V(\tilde{J}_2(E))_p \longrightarrow S^2T^*_x \oplus (S^2T^*_x \otimes T^*_x)$$

est surjective : R'_2 est donc le noyau d'un morphisme de rang constant. D'un autre côté, on peut toujours trouver une immersion à seconde forme fondamentale donnée au point x : plus précisément, étant donné $q \in \tilde{J}_1(E)_x$ et $\theta \in S^2T^*_x \otimes T_{Y,\pi_o(q)}$, il existe une application h de X dans Y telle que $j_1(h)(x) = q$ et que $B^h_x = \theta$. La fibre $R'_{2,x}$ n'est donc pas vide.

Remarque.

L'application $\pi_1 : R'_2 \to R'_1$ est surjective et le premier prolongement du symbole de R'_1 est un fibré vectoriel sur R'_1 : si ℓ est un entier positif, le ℓ-ième prolongement de R'_2 est donc égal au $(\ell+1)$-ième prolongement de R'_1 .

Soit

$$\rho : \tilde{J}_2(E) \to G$$

le morphisme de fibrés sur X défini par

$$(3.7) \quad \rho(p)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = (f^*R'-R)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) + g'(B^f_x(\xi,\lambda),B^f_x(\eta,\zeta)) - g'(B^f_x(\xi,\zeta),B^f_x(\eta,\lambda))$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta,\lambda \in T_x$, si $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$.

Proposition 3.3.

La suite de fibrés à fibre variable sur X

$$R'_3 \xrightarrow{\pi_2} R'_2 \underset{0}{\overset{\rho}{\rightrightarrows}} G \quad ,$$

où R'_3 est le premier prolongement de R'_2 , est exacte.

Démonstration :

Soit $p = j_2(f)(x) \in R'_2$, où $f \in C^\infty(X,Y)$ est de rang maximum en $x \in X$. Si $x^1,\dots,x^n$ sont des coordonnées locales au voisinage de x , on a

$$(3.8) \quad \rho(p)(\partial i_x,\partial j_x,\partial k_x,\partial \ell_x) = \frac{\partial}{\partial x^i} g'(B^f(\partial_j,\partial_k),f_*\partial\ell)(x) - \frac{\partial}{\partial x^j} g'(B^f(\partial_i,\partial_k),f_*\partial_\ell)(x)$$

pour tous entiers i,j,k,ℓ compris entre 1 et n , où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$; si $j_3(f)(x) \in R'_3$, on a clairement, d'après (3.8) , $\rho(p) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\rho(p) = 0$ et donnons nous des coordonnées locales $y^1,\dots,y^m$ au voisinage de $f(x) \in Y$ telles que $f_*\partial_{i_x} = (\frac{\partial}{\partial y^i})_{f(x)}$, pour $i = 1,\dots,n$. L'expression

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g'(B^f(\partial_j,\partial_k), f*\partial_\ell)(x)$$

est de la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial^3 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}(x)\ g'_{\alpha\ell}(f(x)) - H_{ijk\ell}(p) \quad ,$$

où $g'_{\alpha\ell} = g'(\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\frac{\partial}{\partial y^\ell})$ et $H_{ijk\ell}(p)$ est un nombre réel ne dépendant que du 2-jet de f en x (voir (1.1) et (1.2)). On pose alors

$$\theta^\alpha_{ijk} = \sum_{\ell=1}^{n} g'^{\alpha\ell}(f(x)) H_{ijk\ell}(p) \quad ,$$

où $(g'^{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de $(g'_{\alpha\beta})$. Comme les $H_{ijk\ell}(p)$ sont symétriques en i,j et k

(en effet $H_{ijk\ell}(p) - H_{jik\ell}(p) = \rho(p)(\partial i_x, \partial j_x, \partial k_x, \partial \ell_x) = 0$) ,

il en est de même pour les θ^α_{ijk} . Il existe donc une application $h \in C^\infty(X,Y)$ telle que $j_2(h)(x) = p$ et que $\frac{\partial^3 h^\alpha}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}(x) = \theta^\alpha_{ijk}$ pour tous entiers i,j,k ; enfin, par construction, $q = j_3(h)(x) \in R'_3$ et $\pi_2(q) = p$.

Si $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ et $C \in S^2T^*_x \otimes T_{Y,f(x)}$, on a

$$(3.9)\quad \rho*_p(C)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = g'(B^f_x(\xi,\lambda),C(\eta,\zeta)) + g'(B^f_x(\eta,\zeta),C(\xi,\lambda)) - g'(B^f_x(\xi,\zeta),C(\eta,\lambda)) - g'(B^f_x(\eta,\lambda),C(\xi,\zeta))$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta,\lambda \in T_x$.

Lemme 3.1.

Si $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$, l'image de l'application

$$\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^*_x \otimes T_{Y,f(x)} \to T^*_x \otimes G_x$$

est contenue dans le sous-espace H_x de $T^*_x \otimes G_x$ formé des tenseurs vérifiant la deuxième identité de Bianchi.

Démonstration : Si $C \in S^3T^*_x \otimes T_{Y,f(x)}$ et si $\xi,\eta,\zeta,\lambda,\mu$ sont des vecteurs tangents en x à X, on a

$$(3.10) \quad \rho_{*p} \circ \delta(C)(\xi,\eta,\zeta,\lambda,\mu) = g'(B^f_x(\zeta,\lambda), C(\xi,\eta,\mu)) + g'(B^f_x(\eta,\mu), C(\xi,\zeta,\lambda)) - g'(B^f_x(\zeta,\mu), C(\xi,\eta,\lambda)) - g'(B^f_x(\eta,\lambda), C(\xi,\zeta,\mu)) .$$

En sommant l'expression ci-dessus par permutation circulaire sur ξ,η,ζ , on vérifie facilement qu'on obtient zéro.

La proposition 3.3 montre que l'équation R'_2 n'est pas formellement intégrable. Le noyau $R_2 = \mathrm{Ker}_o(\varphi \oplus \psi \oplus \rho)$ ne sera pas en général une équation différentielle ; cependant nous allons montrer dans la suite que, si la dimension de Y est suffisamment grande, la restriction de R_2 à un certain sous-fibré ouvert de $\tilde{J}_2(E)$ est une équation différentielle formellement intégrable.

Remarque.

Dans la terminologie classique des sous-variétés (voir [7] , Ch. VII) $\mathrm{Ker}_o\psi$ est l'équation de Gauss-Weingarten et $\mathrm{Ker}_o\rho$ l'équation de Gauss.

4. CALCUL DE CERTAINS CARACTERES.

Nous supposons désormais que $m \geq \frac{n(n+1)}{2}$; $\mathcal{O} \subset \tilde{J}_2(E)$ désignera le sous-fibré ouvert de $\tilde{J}_2(E)$ construit de la manière suivante : un jet $j_2(f)(x)$ appartient à $\mathcal{O}_x$ si et seulement si il existe un sous-espace U de dimension $n-1$ de T_x tel que f_*T_x et $B^f_x(S^2U)$

engendrent un sous-espace de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ de $T_{Y,f(x)}$. Remarquons tout de suite que cette condition équivaut à trouver une base $\{t_1,\dots,t_n\}$ de T_x telle que les vecteurs

$$f_*t_1,\dots,f_*t_n \ , \text{ et } \ B^f_x(t_i,t_j) \ , \text{ avec } \ 1 \le i \le j \le n-1$$

soient linéairement indépendants.

Le fait qu'un jet $p = j_2(f)(x)$ appartienne à R'_2 impose seulement à la deuxième forme fondamentale de f en x de prendre ses valeurs dans l'orthogonal $f_*T^\perp_x$ de f_*T_x dans $T_{Y,f(x)}$, qui est de dimension supérieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{2}$: quel que soit $x \in X$, on pourra donc toujours trouver des jets appartenant à $R'_2 \cap \mathcal{O}_x$. Cette remarque étant faite, on se fixe, dans ce paragraphe et dans le suivant, un élément $p = j_2(f)(x) \in \mathcal{O}$; on note, pour le moment, T , G , H , ... etc les fibres en x de ces fibrés ; on posera, en outre, $B^f_x = B$, $T_{Y,f(x)} = T_Y$ et $f_*T^\perp_x = T^\perp_Y$.

Proposition 4.1. (Elie Cartan [1]).

Si $\{t_1,\dots,t_n\}$ est une base de T telle que les vecteurs $B(t_i,t_j)$, avec $1 \le i \le j \le n-1$, soient linéairement indépendants, alors

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\dots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T_Y) = G_{n-\alpha}(t_1,\dots,t_n)$$

pour tout entier α compris entre 0 et n .

Démonstration : Le cas $\alpha = 0$ étant trivial, nous supposerons dans la démonstration que $\alpha \ge 1$. L'inclusion

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\dots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T_Y) \subset G_{n-\alpha}(t_1,\dots,t_n)$$

est évidente ; elle est d'ailleurs vraie pour n'importe quelle base de T . Réciproquement, si $w \in G_{n-\alpha}(t_1,\dots,t_n)$, soit C l'élément de $S^2T^*_{\{t_1,\dots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T_Y$ dont les composantes $C(t_i,t_j)$ se calculent, à l'aide d'une double récurrence sur les indices i et j , comme suit :

1) le vecteur $C(t_{n-\alpha+1},t_{n-\alpha+1})$ est choisi tel que les relations

$$g'(B(t_h,t_k),C(t_{n-\alpha+1},t_{n-\alpha+1})) = -\omega(t_h,t_{n-\alpha+1},t_k,t_{n-\alpha+1})$$

soient vérifiées pour tous entiers h , k tels que $h \leq k \leq n-\alpha$, ce qui est possible, puisque les relations ci-dessus signifient que le vecteur $C(t_{n-\alpha+1},t_{n-\alpha+1})$ doit avoir des produits scalaires donnés avec les vecteurs $B(t_h,t_k)$, pour $1 \leq h \leq k \leq n-\alpha$, qui sont linéairement indépendants ;

2) Si $n-\alpha+1 \leq i \leq j$, le vecteur $C(t_i,t_j)$ est choisi tel que les relations

$$g'(B(t_h,t_j),C(t_i,t_k)) + g'(B(t_i,t_k),C(t_h,t_j)) - g'(B(t_h,t_k),C(t_i,t_j))$$

$$- g'(B(t_i,t_j),C(t_h,t_k)) = \omega(t_h,t_i,t_k,t_j)$$

soient vérifiées pour tous entiers h,k tels que $h \leq k$, $h < i$ et $k < j$; un tel choix est encore possible, puisque les relations ci-dessus signifient que le vecteur $C(t_i,t_j)$ doit avoir des produits scalaires donnés, dépendant des vecteurs $C(t_r,t_s)$, pour $r < i$, $s \leq j$ ou $r \leq i$, $s < j$, avec les vecteurs linéairement indépendants $B(t_h,t_k)$, pour $h < i$, $h \leq k < j$.

On a donc $\rho_{*p}(C)(t_i,t_j,t_k,t_\ell) = \omega(t_i,t_j,t_k,t_\ell)$ si $i < j$, $k < \ell$, $i \leq k$, $j \leq \ell$ et $j \geq n-\alpha+1$; comme $\omega \in G_{n-\alpha}(t_1,\ldots,t_n)$ et $C \in S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T_Y$, on a

$$\rho_{*p}(C)(t_i,t_j,t_k,t_\ell) = \omega(t_i,t_j,t_k,t_\ell) = 0 \text{ si } i < j \leq n-\alpha ,$$

quels que soient k et ℓ : il s'ensuit que $\rho_{*p}(C) = \omega$ (voir le lemme 2.1).

Corollaire 4.1.

Si $\{t_1,\ldots,t_n\}$ *est une base de* T *telle que les vecteurs*

$$f_*t_1,\ldots,f_*t_n \text{ et } B(t_i,t_j) \text{ , avec } 1 \leq i \leq j \leq n-1 ,$$

soient linéairement indépendants, on a

$$(\psi\oplus\rho)_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T_Y) = (S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T^*)\oplus G_{n-\alpha}(t_1,\ldots,t_n)$$

pour tout entier α compris entre 0 et n ; en particulier l'application

$$(\psi\oplus\rho)_{*p} : S^2T^*\otimes T_Y \to (S^2T^*\otimes T^*)\oplus G$$

est surjective.

Démonstration : Reprenant la construction de la proposition 4.1, les vecteurs $C(t_i,t_j)$ pourront ici avoir, en plus, des produits scalaires donnés avec $f_*t_1,\ldots,f_*t_n$, d'où le résultat.

Comme cas particulier du corollaire 4.1, on obtient :

Corollaire 4.2.

Sous les hypothèses du corollaire 4.1, on a

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T_Y^\perp) = G_{n-\alpha}(t_1,\ldots,t_n) , \tag{4.1}$$

pour tout entier α compris entre 0 et n ; en particulier, l'application

$$\rho_{*p} : S^2T^*\otimes T_Y^\perp \to G$$

est surjective.

Corollaire 4.3.

Le noyau $\mathrm{Ker}_o(\varphi\oplus\psi\oplus\rho\,|\,\mathcal{C}) = R_2\cap\mathcal{C}$ est une équation différentielle.

Démonstration : L'application $\bar\rho : S^2T^*\otimes T_Y^\perp \to G$ définie par

$$\bar\rho(C)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = g'(C(\xi,\lambda),C(\eta,\zeta)) - g'(C(\xi,\zeta),C(\eta,\lambda))$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta,\lambda \in T$, si $C \in S^2T^*\otimes T_Y^\perp$, est surjective : en effet, si $\omega \in G$, on construit des solutions C de $\bar\rho(C) = \omega$ telles que les vecteurs

$$C(e_i,e_j) \text{ , avec } 1 \le i \le j \le n-1 ,$$

où $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est une base de T , soient linéairement indépendants (on démontre ce résultat en utilisant, avec des modifications mineures, la construction donnée, pour $\alpha = n$, dans la proposition 4.1). Comme $f^*R' - R \in G$, on peut trouver $C \in S^2T^*\otimes T_Y^\perp$, dont la restriction au carré symétrique d'un sous-espace de dimension $n-1$ de T soit

injective, telle que

$$\bar{\rho}(C) = f^*R' - R \ ;$$

par ailleurs, il existe $q = j_2(h)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ tel que $\pi_1(q) = \pi_1(p)$ et que $B^h_x = C$: comme $\psi(q) = 0$ (puisque C prend ses valeurs dans $T_Y^\perp = h_* T_X^\perp$) et que $\rho(q) = f^*R' - R - \bar{\rho}(C) = 0$, q appartient à R_2 et même à $R_2 \cap \mathcal{O}$. La fibre de $R_2 \cap \mathcal{O}$ au-dessus de chaque point de X n'est donc jamais vide. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
S^2T^*\otimes T_Y & \xrightarrow{(\psi\oplus\rho)_{*p}} & E' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow i & & \\
V(\mathcal{O})_p & \xrightarrow{(\varphi\oplus\psi\oplus\rho)_{*p}} & S^2T^*\oplus E' & & \\
\downarrow \pi_{1*} & & \downarrow pr_1 & & \\
V(\tilde{J}_1(E))_{\pi_1(p)} & \xrightarrow{\varphi'_{*\pi_1(p)}} & S^2T^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

où $E' = (S^2T^*\otimes T^*)\oplus G$ et i est l'injection linéaire naturelle de E' dans $S^2T^*\oplus E'$, est exact et commutatif, par conséquent l'application

$$(\varphi\oplus\psi\oplus\rho)_{*p} : V(\mathcal{O})_p \to S^2T^*\oplus E'$$

est surjective ; ainsi $R_2 \cap \mathcal{O}$ est le noyau d'un morphisme de rang constant, donc une équation différentielle.

On pose $\tilde{R}_2 = R_2 \cap \mathcal{O}$ et on appelle g_2 le symbole de $\tilde{R}_2$; on suppose dans la suite que le jet p défini au début du paragraphe est dans $\tilde{R}_2$.

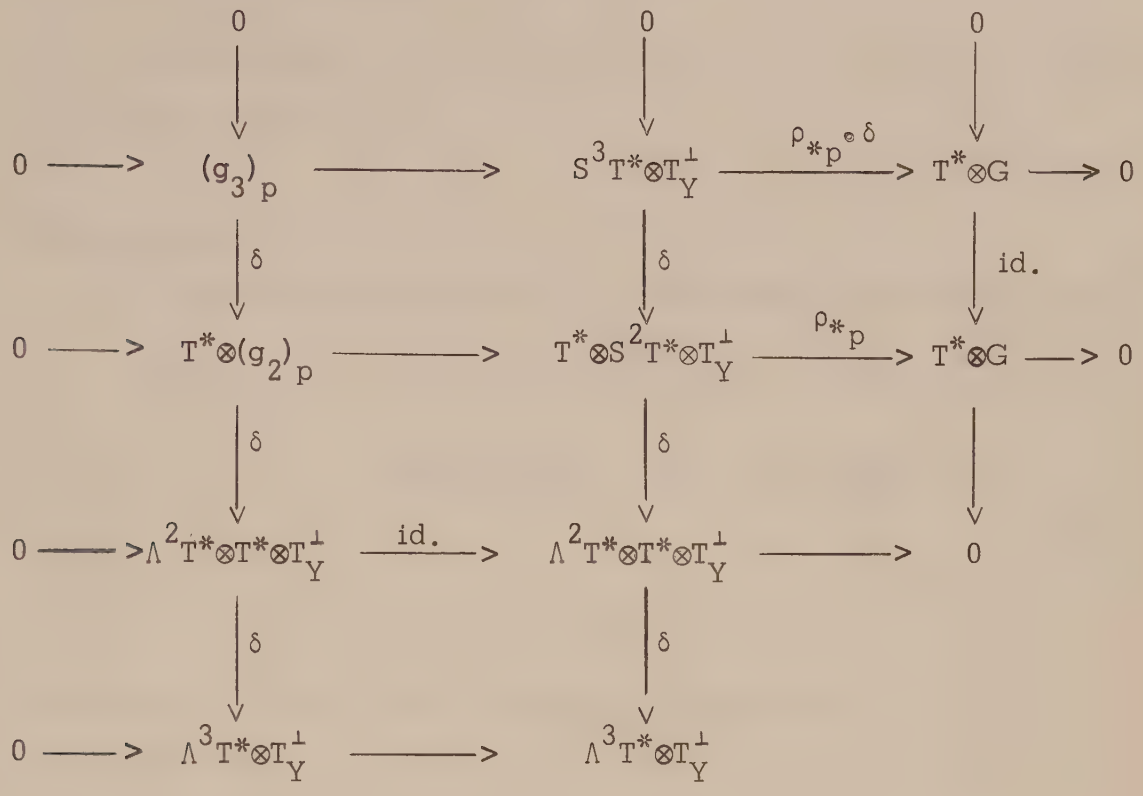
Corollaire 4.4.

Le conoyau de l'application

$$\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^*\otimes T_Y^\perp \to T^*\otimes G$$

s'identifie canoniquement au deuxième groupe de cohomologie de Spencer $H^{1,2}(g_2)_p$.

Démonstration : Le diagramme commutatif suivant



est exact sauf en $T^*\otimes G$, dans sa première ligne, et en $\Lambda^2T^*\otimes T^*\otimes T_Y^\perp$, dans sa première colonne : il permet donc de construire l'identification souhaitée.

Corollaire 4.5.

Sous les hypothèses de la proposition 4.1, on a

$$\dim(g_2)_{p\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}} = \frac{\alpha(\alpha+1)\,[-3n^2+(2\alpha-5)n+6m]}{12} \quad , \tag{4.2}$$

pour tout entier α compris entre 0 et n .

Démonstration : Ce résultat s'obtient aisément en combinant le lemme 2.2, l'égalité 4.1 et l'exactitude de la suite

$$0 \to (g_2)_{p\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}} \to S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}}\otimes T_Y^\perp \xrightarrow{\rho_{*p}} G_{n-\alpha}(t_1,\ldots,t_n) \to 0$$

5. LE THEOREME DE CARTAN.

Avant d'aller plus loin, nous énoncerons le théorème principal que nous avons en vue :

Théorème 5.1 (Elie Cartan).

L'équation différentielle $\tilde{R}_2$ *est formellement intégrable.*

Soient W et W' les fibrés vectoriels sur $\tilde{R}_2$ définis par

(5.1) $$W = \mathrm{Coker}(\Phi_* \circ \delta) \quad , \quad \text{où} \quad \Phi = \varphi \oplus \psi \oplus \rho \quad ,$$

et par

(5.2) $$W' = \mathrm{Coker}(\rho_* \circ \delta \,|_{\mathrm{Ker}(\psi_* \circ \delta)}) \; ;$$

appliquant le lemme 0.4, on construit une section Ω de W sur $\tilde{R}_2$ telle que la suite

(5.3) $$\tilde{R}_3 \xrightarrow{\pi_2} \tilde{R}_2 \underset{0}{\overset{\Omega}{\rightrightarrows}} W \quad ,$$

où $\tilde{R}_3$ désigne le premier prolongement de $\tilde{R}_2$, soit exacte. Il existe $q \in R'_3$ tel que $\pi_2(q) = p$ (prop. 3.3), donc $p_1(\varphi)(q) = 0$ et $p_1(\psi)(q) = 0$; par conséquent, $\Omega(p)$ est la classe d'un élément de la forme $(0,0,\theta) \in T^* \otimes (S^2T^* \oplus (S^2T^* \otimes T^*) \oplus G)$. Si $C \in S^3T^* \otimes T_Y^{\perp}$, on a toujours $\varphi_{*p} \circ \delta(C) = 0$ et $\psi_{*p} \circ \delta(C) = 0$: la classe $\Omega(p)$ sera donc nulle si et seulement si θ est dans l'image de l'homomorphisme

$$\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^* \otimes T_Y^{\perp} \to T^* \otimes G \; ;$$

en d'autres termes, Ω prend ses valeurs dans W' identifié à un sous-fibré de W .

Lemme 5.1.

L'élément $\theta = p_1(\rho)(q)$ *de* $T^* \otimes G$, *où* q *est un relèvement de* p *dans* R'_3 , *est un représentant de* $\Omega(p)$ *dans* W'_p ; *en outre, il vérifie la deuxième identité de Bianchi.*

Démonstration : Le fait que θ soit un représentant de $\Omega(p)$ est une conséquence triviale de la définition de Ω . On peut supposer, sans perte de généralité, que le relèvement q est égal à $j_3(f)(x)$; dans ces conditions, on a

$$(5.4)\quad \theta(\xi,\eta,\zeta,\lambda,\mu) = \mathfrak{S}_{\xi}\{(f^*R'-R)(\tilde{\eta},\tilde{\zeta},\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) + g'(B^f(\tilde{\eta},\tilde{\mu}),B^f(\tilde{\zeta},\tilde{\lambda})) - g'(B^f(\tilde{\eta},\tilde{\lambda}),B^f(\tilde{\zeta},\tilde{\mu}))\}$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta,\lambda,\mu \in T$, où $\tilde{\eta},\tilde{\zeta},\tilde{\lambda},\tilde{\mu}$ sont respectivement des extensions quelconques de η,ζ,λ,μ sur un voisinage de x dans X . Le signe $\mathfrak{S}$ mis devant une fonction de ξ,η,ζ voudra dire que l'on somme par permutation circulaire sur ξ,η,ζ . Si on choisit les extensions des vecteurs $\xi,\eta,\zeta,\lambda,\mu$ telles que le crochet de deux quelconques d'entre elles soit toujours nul, on a

$$\mathfrak{S}_{\xi}\{g'(B^f(\tilde{\eta},\tilde{\mu}),B^f(\tilde{\zeta},\tilde{\lambda})) - g'(B^f(\tilde{\eta},\tilde{\lambda}),B^f(\tilde{\zeta},\tilde{\mu}))\}$$

$$= \mathfrak{S}_{\xi}\{g'(\nabla'_{f_*\tilde{\eta}}\tilde{f_*\mu},\nabla'_{f_*\tilde{\zeta}}\tilde{f_*\lambda}) - g'(\nabla'_{f_*\tilde{\eta}}\tilde{f_*\lambda},\nabla'_{f_*\tilde{\zeta}}\tilde{f_*\mu}) - g(\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\mu},\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\lambda}) + g(\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\lambda},\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\mu})\}$$

$$= \mathfrak{S}g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\eta}}\tilde{f_*\mu},\nabla'_{f_*\zeta}\tilde{f_*\lambda}) + g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\zeta}}\tilde{f_*\lambda},\nabla'_{f_*\eta}\tilde{f_*\mu}) - g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\eta}}\tilde{f_*\lambda},\nabla'_{f_*\zeta}\tilde{f_*\mu})$$
$$- g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\zeta}}\tilde{f_*\mu},\nabla'_{f_*\eta}\tilde{f_*\lambda}) - g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\mu},\nabla_{\zeta}\tilde{\lambda}) - g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\lambda},\nabla_{\eta}\tilde{\mu}) + g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\lambda},\nabla_{\zeta}\tilde{\mu})$$
$$+ g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\mu},\nabla_{\eta}\tilde{\lambda})$$

$$= \mathfrak{S}R'(f_*\xi,f_*\eta,f_*\mu,\nabla'_{f_*\zeta}\tilde{f_*\lambda}) - R'(f_*\xi,f_*\eta,f_*\lambda,\nabla'_{f_*\zeta}\tilde{f_*\mu}) - R(\xi,\eta,\mu,\nabla_{\zeta}\tilde{\lambda})$$
$$+ R(\xi,\eta,\lambda,\nabla_{\zeta}\mu)$$

$$= \mathfrak{S} - R'(\nabla'_{f_*\xi}\tilde{f_*\eta},f_*\zeta,f_*\lambda,f_*\mu) - R'(f_*\eta,\nabla'_{f_*\xi}\tilde{f_*\zeta},f_*\lambda\ f_*\mu)$$
$$- R'(f_*\eta,f_*\zeta,\nabla'_{f_*\xi}\tilde{f_*\lambda},f_*\mu) - R'(f_*\eta,f_*\zeta,f_*\lambda,\nabla'_{f_*\xi}\tilde{f_*\mu}) + R(\nabla_{\xi}\tilde{\eta},\zeta,\lambda,\mu)$$
$$+ R(\eta,\nabla_{\xi}\tilde{\zeta},\lambda,\mu) + R(\eta,\zeta,\nabla_{\xi}\tilde{\lambda},\mu) + R(\eta,\zeta,\lambda,\nabla_{\xi}\tilde{\mu})$$

$$= \mathfrak{S}_{\xi}(R - f^*R')(\tilde{\eta},\tilde{\zeta},\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) \quad ,$$

donc θ vérifie la deuxième identité de Bianchi.

Proposition 5.1.

L'image de l'application

$$\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^* \otimes T_Y^{\perp} \to T^* \otimes G$$

est égale à H .

Démonstration : Soient $\{t_1,\dots,t_n\}$ une base de T satisfaisant les conditions données dans la proposition 4.1, $\{t_1^*,\dots,t_n^*\}$ sa base duale dans T^* et $\omega = \sum_{i=1}^{n} t_i^* \otimes \omega_i$ un élément de H : compte-tenu du lemme 3.1 et de la 1-acyclicité de l'opérateur δ , le résultat nous est acquis si nous prouvons que, pour tout entier h compris entre 1 et n , il existe $C^{(1)},\dots,C^{(h)} \in S^2T^* \otimes T_Y^{\perp}$ tels que

$$\rho_{*p}(C^{(k)}) = \omega_k \quad , \quad \text{avec} \quad k = 1,\dots,h \ ,$$

et que

$$\delta_{t_i} C^{(j)} = \delta_{t_j} C^{(i)} \quad , \ \text{avec} \quad 1 \le i,j \le h \ .$$

Nous allons procéder par récurrence sur h . La propriété est vraie pour $h = 1$, puisque l'application $\rho_{*p} : S^2T^* \otimes T_Y^{\perp} \to G$ est surjective ; supposons-la vraie pour un entier $h \ge 1$: soit

$$C_1^{(h+1)} = \sum_{1 \le i \le j \le h} t_i^* . t_j^* \otimes C_{ij}^{(h+1)}$$

l'élément de $S^2T^* \otimes T_Y^{\perp}$, dont les composantes sont données par les équations

$$\delta_{t_i} C_1^{(h+1)} = \delta_{t_{h+1}} C^{(i)} \quad , \ \text{avec} \quad i = 1,\dots,h \ ;$$

on a, pour tous entiers i,j,k,ℓ compris entre 1 et h ,

$$\rho_{*p}(C_1^{(h+1)})(t_i,t_j,t_k,t_\ell) =$$

$$= g'(B(t_i,t_\ell), C_1^{(h+1)}(t_j,t_k)) + g'(B(t_j,t_k), C_1^{(h+1)}(t_i,t_\ell)) - g'(B(t_i,t_k), C_1^{(h+1)}(t_j,t_\ell))$$

$$- g'(B(t_j,t_\ell), C_1^{(h+1)}(t_i,t_k))$$

$$= g'(B(t_i,t_\ell), C^{(j)}(t_{h+1},t_k)) + g'(B(t_j,t_k), C^{(i)}(t_{h+1},t_\ell)) - g'(B(t_i,t_k), C^{(j)}(t_{h+1},t_\ell))$$

$$- g'(B(t_j,t_\ell), C^{(i)}(t_{h+1},t_k))$$

$$= -\omega_i(t_j,t_{h+1},t_k,t_\ell) + g'(B(t_{h+1},t_k),C^{(i)}(t_j,t_\ell)) - g'(B(t_{h+1},t_\ell),C^{(i)}(t_j,t_k))$$
$$+ g'(B(t_i,t_\ell),C^{(j)}(t_{h+1},t_k)) - g'(B(t_i,t_k),C^{(j)}(t_{h+1},t_\ell))$$

$$= -\omega_i(t_j,t_{h+1},t_k,t_\ell) - \omega_j(t_{h+1},t_i,t_k,t_\ell)$$

$$= \omega_{h+1}(t_i,t_j,t_k,t_\ell) ,$$

d'après la deuxième identité de Bianchi ; le raisonnement se termine par la remarque suivante : si $C = \sum_{i\le j\le h} t_i^* t_j^* \otimes C_{ij} \in S^2T^*\otimes T_Y^\perp$ et $\varpi \in G$ sont tels que $\rho_{*p}(C)(t_i,t_j,t_k,t_\ell) = \varpi(t_i,t_j,t_k,t_\ell)$ pour tous entiers $i,j,k,\ell \le h$, il existe

$$\tilde{C} = \sum_{i\le j\le n} t_i^* t_j^* \otimes \tilde{C}_{ij} \in S^2T^*\otimes T_Y^\perp$$

tel que

1) $\rho_{*p}(C) = \overline{\varpi}$

et

2) $\tilde{C}_{ij} = C_{ij}$, si $i \le j \le h$.

Ce résultat est une conséquence triviale de l'égalité

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_h\}}\otimes T_Y^\perp) = G_h(t_1,\ldots,t_n) .$$

Corollaire 5.1.

Le fibré vectoriel W' est égal au fibré image réciproque du fibré quotient $T^*\otimes G/H$ par la projection $\pi : \tilde{R}_2 \to X$.

Corollaire 5.2.

L'application $\pi_2 : \tilde{R}_3 \to \tilde{R}_2$ est surjective.

Démonstration : Le lemme 5.1. et la proposition 5.1 montrent que Ω est la section nulle de W' sur $\tilde{R}_2$; l'exactitude de (5.3) entraîne le résultat.

Proposition 5.2.

Une base $\{t_1,\ldots,t_n\}$ de T , satisfaisant les conditions données dans la proposition 4.1, est quasi régulière pour $(g_2)_p$.

Démonstration : Utilisant le lemme 2.3 et la proposition 5.1, on trouve que $(g_3)_p = \mathrm{Ker}(\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^* \otimes T_Y^{\perp} \to T^* \otimes G)$ a pour dimension

$$\frac{n(n+1)(n+2)(-n^2-3n+4m)}{24} \quad ;$$

d'un autre côté,

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \dim(g_2)_{p\{t_1,\ldots,t_{n-\alpha}\}} = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)[-3n^2+(2\alpha-5)n+6m]}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(-n^2-3n+4m)}{24} \quad ,$$

d'où le résultat cherché.

Démonstration du théorème 5.1 : D'après la proposition 5.2, $\tilde{R}_2$ est une équation involutive. L'application $\pi_2 : \tilde{R}_3 \to \tilde{R}_2$ est surjective (Cor. 5.2). Enfin, le premier prolongement du symbole de $\tilde{R}_2$ est le noyau du morphisme de fibrés vectoriels sur $\tilde{R}_2$

$$(\psi \oplus \rho)_* \circ \delta : S^3T^* \underset{\tilde{R}_2}{\otimes} V(E) \to T^* \underset{\tilde{R}_2}{\otimes} ((S^2T^* \otimes T^*) \oplus G) \quad ,$$

qui est de rang constant : c'est un fibré vectoriel. L'équation $\tilde{R}_2$ remplit donc les conditions données dans le théorème 0.1 ; ainsi $\tilde{R}_2$ est formellement intégrable.

Comme corollaire des théorèmes 0.2 et 5.1, on a le résultat suivant :

Corollaire 5.3 (Théorème de Janet-Cartan).

Si X et Y sont des variétés riemanniennes analytiques, alors X s'immerge isométriquement localement dans Y .

Remarque.

Tout comme celle d'Elie Cartan, cette démonstration s'applique aux variétés pseudo-riemanniennes puisque, nulle part, nous ne faisons intervenir le caractère positif des métriques.

6. LE PROBLEME A DEUX DIMENSIONS.

Nous allons donner une démonstration du théorème 5.1, dans le cas où dim X = 2 , indépendante de la démonstration de ce dernier. Soit $p = j_2(f)(x) \in \tilde{R}_2$: on note pour le moment T , G , g_2 , g_3 les fibres en x ou p de ces fibrés ; on posera encore $B_x^f = B$ et $f_* T_x^\perp = T_Y^\perp$.

Lemme 6.1.

Une base $\{t_1, t_2\}$ *de* T *telle que le vecteur* $B(t_1, t_1)$ *soit non nul est quasi-régulière pour* g_2 .

Démonstration : Soient $C \in g_2$ et $\tilde{C} \in S^3T^* \otimes T_Y^\perp$ tels que $\delta_{t_1} \tilde{C} = C$. Puisque $B(t_1, t_1)$ n'est pas nul, on peut choisir $\tilde{C}$ tel que

$$(6.1) \quad g'(B(t_1,t_1), \delta_{t_2} \tilde{C}(t_2,t_2)) = 2g'(B(t_1,t_2), \delta_{t_2} \tilde{C}(t_1,t_2)) - g'(B(t_2,t_2), \delta_{t_2} \tilde{C}(t_1,t_1))$$

L'égalité (6.1) signifie que $\delta_{t_2} \tilde{C} \in g_2$: nous avons donc montré que l'application $\delta_{t_1} : g_3 \to g_2$ est surjective. D'un autre côté, la surjectivité de l'application $\delta_{t_2} : g_{3\{t_1\}} \to g_{2\{t_1\}}$ est triviale, d'où le résultat.

Lemme 6.2.

L'application $\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^* \otimes T_Y^\perp \to T^* \otimes G$ *est surjective.*

Démonstration : Soit $\{t_1, t_2\}$ une base de T telle que $B(t_1, t_1)$ soit non nul. Un élément C de $S^2T^* \otimes T_Y^\perp$ appartient à g_2 si et seulement si la relation

$$g'(B(t_1,t_1), C(t_2,t_2)) = 2g'(B(t_1,t_2), C(t_1,t_2)) - g'(B(t_2,t_2), C(t_1,t_1))$$

est satisfaite. Il est donc clair que dim $g_2 = 3(m-2)-1$ et que dim $g_{2\{t_1\}} = m-3$; par conséquent,

$$\dim g_3 = \dim g_2 + \dim g_{2\{t_1\}} = 3m-7+m-3 = 4m - 10 .$$

Par ailleurs, on a dim $T^* \otimes G = 2$ et dim $S^3T^* \otimes T_Y^\perp = 4m-8$, donc $\rho_* \circ \delta$ est de rang 2 . C.Q.F.D.

L'intégrabilité formelle de $\tilde{R}_2$ découle aisément de ces deux lemmes.

Lemme 6.3.

Supposons que la variété Y soit de dimension 3 : si, pour tout couple de points $(x,x') \in X \times Y$, les courbures sectionnelles de Y en x' sont strictement supérieures à la courbure gaussienne de X en x, alors l'équation $\tilde{R}_2$ est elliptique.

Démonstration : Soit $\{t_1,t_2\}$ une base de T telle que $B(t_1,t_1)$ soit non nul et que $B(t_1,t_2) = 0$. Soient $\lambda \in T^*-\{0\}$ et $v \in T_Y^\perp$: si $\lambda^2 \otimes v \in g_2$, on a

$$\lambda(t_2)^2 g'(B(t_1,t_1),v) + \lambda(t_1)^2 g'(B(t_2,t_2),v) = 0 \quad .$$

Comme dim $T_Y^\perp = 1$, il existe un nombre réel α tel que $B(t_2,t_2) = \alpha B(t_1,t_1)$: on a

$$\alpha \|B(t_1,t_1)\|^2 = g'(B(t_1,t_1),B(t_2,t_2)) = (f^*R'-R)(t_1,t_2,t_1,t_2) \quad ;$$

par hypothèses, $(f^*R'-R)(t_1,t_2,t_1,t_2) > 0$, donc $\alpha > 0$. On a

$$[\alpha\lambda(t_2)^2 + \lambda(t_1)^2]g'(B(t_1,t_1),v) = 0 \quad ,$$

par conséquent $v = 0$. C.Q.F.D.

7. APPLICATION AUX VARIETES A COURBURE CONSTANTE.

Dans ce paragraphe et les suivants, nous ne supposerons plus systématiquement que $m \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 7.1.

Si X et Y ont même dimension et même courbure sectionnelle constante k, alors R_2 est une équation différentielle formellement intégrable.

Démonstration : Soit $p = j_2(f)(x) \in R'_2$. Puisque $B^f_x = 0$, on a, par une formule classique

$$\rho(p)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = (f^*R'-R)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = k\,[f^*(g'\wedge g')-g\wedge g](\xi,\eta,\zeta,\lambda)$$

$$= k\{g'(f_*\xi,f_*\lambda)g'(f_*\eta,f_*\zeta) - g'(f_*\xi,f_*\zeta)g'(f_*\eta,f_*\lambda)$$
$$- g(\xi,\lambda)g(\eta,\zeta) + g(\xi,\zeta)g(\eta,\lambda)\}$$

$$= 0$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta,\lambda \in T_x$, donc $R'_2 = R_2$. Le symbole de R_2 est nul ; d'après la proposition 3.3, on a $R_2 = \pi_2(R'_3)$, donc R_2 est formellement intégrable.

Corollaire 7.1.

Sous les hypothèses de la proposition 7.1, les variétés riemanniennes X et Y sont localement isométriques.

Démonstration : Il est bien connu qu'une variété riemannienne, dont la dérivée covariante du tenseur de courbure est nulle, est analytique (en tant que variété riemannienne) ; comme les variétés à courbure constante entrent dans cette catégorie, l'équation R_2 est analytique, d'où le résultat.

Corollaire 7.2.

Les variétés X et Y étant toujours à même courbure constante, si dim X ≤ dim Y , alors X s'immerge isométriquement localement et de manière totalement géodésique dans Y .

Démonstration : La remarque suivante entraîne le corollaire : par tout point de Y , il passe une sous-variété Z de dimension n de Y telle que l'inclusion de Z dans Y soit une immersion isométrique totalement géodésique, Z étant munie de la métrique induite.

8. LE ROLE DE LA COURBURE.

Il est clair, dans le cas où l'espace ambiant Y est plat, que le rang de la courbure sur X apporte des obstructions à l'intégrabilité formelle des équations sur E , dont les solutions sont des immersions

$$\rho(p)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = (f^*R'-R)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = k[f^*(g'\wedge g')-g\wedge g](\xi,\eta,\zeta,\lambda)$$

$$= k\{g'(f_*\xi,f_*\lambda)g'(f_*\eta,f_*\zeta) - g'(f_*\xi,f_*\zeta)g'(f_*\eta,f_*\lambda)$$
$$- g(\xi,\lambda)g(\eta,\zeta) + g(\xi,\zeta)g(\eta,\lambda)\}$$

$$= 0$$

pour tous $\xi,\eta,\zeta,\lambda \in T_x$, donc $R'_2 = R_2$. Le symbole de R_2 est nul ; d'après la proposition 3.3, on a $R_2 = \pi_2(R'_3)$, donc R_2 est formellement intégrable.

Corollaire 7.1.

Sous les hypothèses de la proposition 7.1, les variétés riemanniennes X et Y sont localement isométriques.

Démonstration : Il est bien connu qu'une variété riemannienne, dont la dérivée covariante du tenseur de courbure est nulle, est analytique (en tant que variété riemannienne) ; comme les variétés à courbure constante entrent dans cette catégorie, l'équation R_2 est analytique, d'où le résultat.

Corollaire 7.2.

Les variétés X et Y étant toujours à même courbure constante, si $\dim X \leq \dim Y$, alors X s'immerge isométriquement localement et de manière totalement géodésique dans Y .

Démonstration : La remarque suivante entraîne le corollaire : par tout point de Y , il passe une sous-variété Z de dimension n de Y telle que l'inclusion de Z dans Y soit une immersion isométrique totalement géodésique, Z étant munie de la métrique induite.

8. LE ROLE DE LA COURBURE.

Il est clair, dans le cas où l'espace ambiant Y est plat, que le rang de la courbure sur X apporte des obstructions à l'intégrabilité formelle des équations sur E , dont les solutions sont des immersions

isométriques : nous allons en donner un exemple précis dans ce paragraphe.

Etant donné un entier α compris entre 0 et n , supposons qu'il existe une base $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ du module des champs de vecteurs sur X (notre travail étant local, cette supposition ne réduit en rien la généralité du problème) telle que la courbure R de X prenne ses valeurs dans $G_{n-\alpha}(\xi_1,\dots,\xi_n)$ (i.e. : pour tout $x \in X$, $R_x \in G_{n-\alpha}(\xi_{1_x},\dots,\xi_{n_x})$) . On suppose de plus que

$$m \geq \frac{n(n+1) - (n-\alpha)(n-\alpha-1)}{2} \tag{8.1}$$

et que Y est plate. La condition (8.1) permet de construire un sous-fibré ouvert $\mathcal{O}^\alpha$ de $\tilde{J}_2(E)$, dont la fibre en $x \in X$ est constituée des $j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ tels que les vecteurs

$$f_*\xi_{1_x},\dots,f_*\xi_{n_x} \quad \text{et} \quad B^f_x(\xi_{i_x},\xi_{j_x}) \text{ , avec } n-\alpha \leq i \leq j \leq n-1 ,$$

soient linéairement indépendants. On montre, par des méthodes analogues à celles des paragraphes 4 et 5, le théorème suivant :

Théorème 8.1.

Le sous-fibré

$$R_2^\alpha = \bigcup_{x\in X} R^\alpha_{2,x} ,$$

où

$$R^\alpha_{2,x} = \{j_2(f)(x) \in R_2 \cap \mathcal{O}^\alpha : \delta_{\xi_{i_x}} B^f_x = 0 \text{ , avec } 1 \leq i \leq n-\alpha\}$$

est une équation différentielle formellement intégrable.

Ce résultat repose sur les deux propositions suivantes.

Proposition 8.1.

Si $p = j_2(f)(x) \in R_2^\alpha$, la base $\{\xi_{1_x},\dots,\xi_{n_x}\}$ de T_x est quasi-régulière pour $(g_2^\alpha)_p$, où

$$(g_2^\alpha)_p = \mathrm{Ker}(\rho_{*p}|_{S^2T^*_x\{\xi_{1_x},\dots,\xi_{n-\alpha_x}\}\otimes f_*T^\perp_x})$$

désigne le symbole de R_2^α en p .

Proposition 8.2.

L'application $\pi_2 : R_3^\alpha \to R_2^\alpha$, *où* R_3^α *est le premier prolongement de* R_2^α , *est surjective*.

A propos de ce dernier résultat, donnons quelques indications :

1) On construit une section Ω^α de $\mathrm{Coker}(\Phi_* \circ \delta|_{S^3T^*\{\xi_1,\ldots,\xi_{n-\alpha}\}} \otimes_{R_2^\alpha} V(E))$ au-dessus de R_2^α telle que la suite

$$R_3^\alpha \xrightarrow{\pi_2} R_2^\alpha \underset{0}{\overset{\Omega^\alpha}{\rightrightarrows}} \mathrm{Coker}(\Phi_* \circ \delta|_{S^3T^*\{\xi_1,\ldots,\xi_{n-\alpha}\}} \otimes_{R_2^\alpha} V(E))$$

soit exacte ;

2) si $p = j_2(f)(x) \in R_2^\alpha$, $\Omega^\alpha(p)$ prend ses valeurs dans

$$\mathrm{Coker}(\rho_* \circ \delta|_{S^3T_x^*\{\xi_{1_x},\ldots,\xi_{n-\alpha_x}\}} \otimes f_*T_x^{\perp})$$

et ce conoyau est égal au quotient

$$T_x^* \otimes G_x / H_{n-\alpha}(\xi_{1_x},\ldots,\xi_{n_x}) \ ;$$

3) enfin la formule (5.4) fournit un représentant de $\Omega^\alpha(p)$ appartenant à $H_{n-\alpha}(\xi_{1_x},\ldots,\xi_{n_x})$, d'où le résultat.

Remarque.

Lorsque $\alpha = n$, on retrouve le théorème 5.1. et sa démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - E. CARTAN - "Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien". Ann. Soc. Pol. Math. 6 (1927) 1-7.

[2] - E. CARTAN - "Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques". Hermann, Paris, 1945.

[3] - H. GOLDSCHMIDT - "Existence theorems for analytic linear partial differential equations". Ann. of Math. 86 (1967) 246-270.

[4] - H. GOLDSCHMIDT - "Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations". J. Diff. Geometry 1 (1967) 269-307.

[5] - H. GOLDSCHMIDT - "Sur la structure des équations de Lie : I. Le troisième théorème fondamental". J. Diff. Geometry 6 (1972) 357-373.

[6] - V. GUILLEMIN et S. STERNBERG - "An algebraic model of transitive differential geometry". Bull. Amer. Math. Soc., 70 1964, 16-47.

[7] - S. KOBAYASHI et K. NOMIZU - "Foundations of differential geometry". Volume II, New-York, Wiley-Interscience, 1969.

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémélologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert.	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VPOUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 Mai 1972

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université scientifique
et médicale,

M. SOUTIF